

Capítulo 8

Trigonometria - Segunda Parte

8.1 Conceitos Preliminares

O número π

Dada uma circunferência de raio r , diâmetro $d = 2r$, o número π é definido como a razão do comprimento C da circunferência pelo seu diâmetro d , isto é,

$$\pi = \frac{C}{d} = \frac{C}{2r} \quad (8.1)$$

O comprimento de uma circunferência

Pela definição do número π na equação (8.1) observamos que o comprimento da circunferência é dado por

$$C = \pi d = 2\pi r \quad (8.2)$$

Medida de ângulos

Existem 2 unidades usuais para a medida de ângulos.

- Grau: 1 grau, denotado 1° , é um ângulo correspondente a $\frac{1}{360}$ de uma volta completa da circunferência. Conseqüentemente, a volta completa na circunferência compreende um ângulo de 360° - Figura 8.1(a).
- Radiano: 1 radiano, denotado 1 rad, é um ângulo correspondente a um arco de mesmo comprimento do raio da circunferência - Figura 8.1(b).

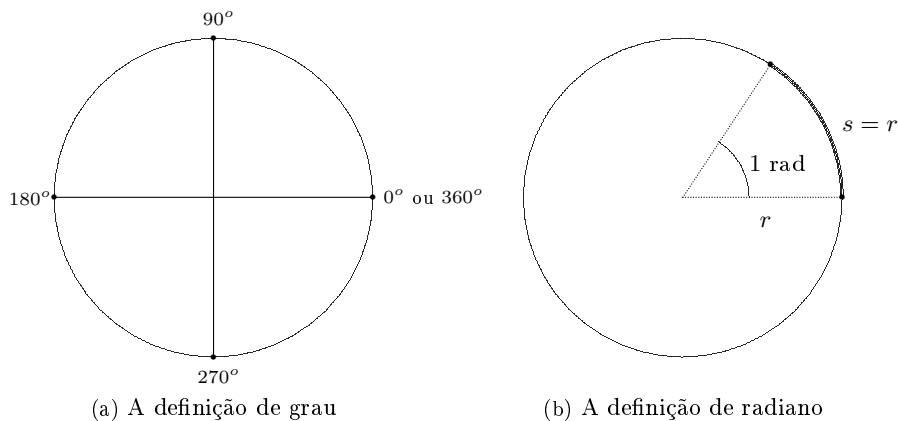


Figura 8.1: Medidas de ângulo

O comprimento de um arco

Em uma circunferência de raio r , seja θ um ângulo qualquer, medido em radianos, e s o arco correspondente - Figura 8.2(a). O valor s do comprimento do arco é obtido por uma regra de 3 simples

$$\frac{1 \text{ rad}}{r} = \frac{\theta \text{ rad}}{s} \quad \therefore \quad s = r \theta$$

Conversão grau-radiano

Determinamos o valor do ângulo, em radianos, para uma volta completa na circunferência por uma regra de 3 simples

$$\frac{1 \text{ rad}}{r} = \frac{x \text{ rad}}{2 \pi r} \quad \therefore \quad x = 2 \pi$$

Isto é, uma volta completa na circunferência corresponde a um ângulo de medida 2π radianos - Figura 8.2(b).

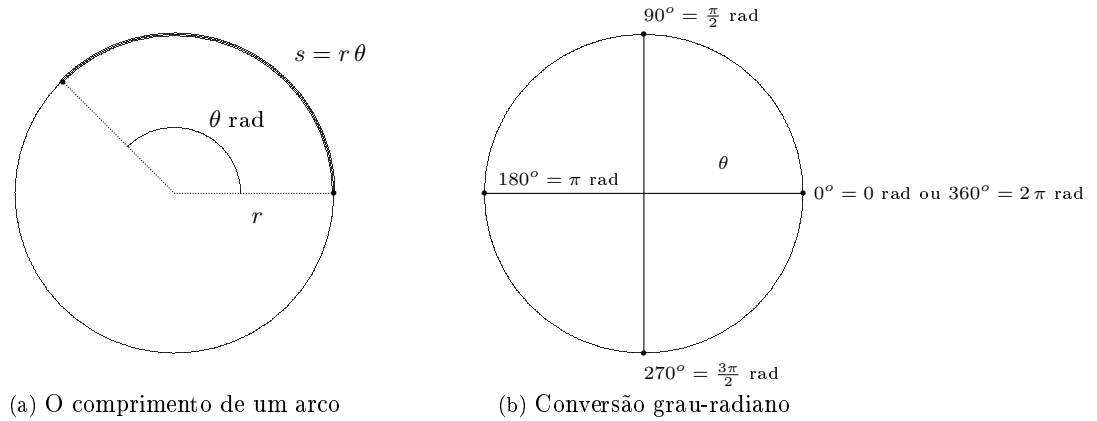


Figura 8.2: Comprimento de arco e a conversão grau-radiano

Dado um ângulo θ em graus, sua medida x em radianos é obtida por uma regra de 3 simples

$$\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{x \text{ rad}}{\theta^\circ} \quad \therefore \quad x = \frac{\theta}{180} \pi \text{ rad}$$

Exemplo 8.1 Determine a medida do ângulo 155° em radianos.

$$\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{x \text{ rad}}{155^\circ} \quad \therefore \quad x = \frac{155}{180} \pi = \frac{31}{35} \pi \text{ rad}$$

Exemplo 8.2 Determine a medida do ângulo $\frac{3}{4} \pi \text{ rad}$ em graus.

$$\frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} = \frac{\frac{3}{4} \pi \text{ rad}}{x} \quad \therefore \quad x = \frac{3}{4} \pi \frac{180}{\pi} = 135^\circ$$

8.2 Círculo Trigonométrico

É o círculo¹ de raio unitário e centro na origem do sistema cartesiano - Figura 8.3(a). No triângulo OPQ da Figura 8.3(b) (lembrando que $\overline{OP} = 1$) observamos que

$$\cos(\theta) = \overline{OQ}/\overline{OP} = x/1 = x \quad \text{e} \quad \sin(\theta) = \overline{PQ}/\overline{OP} = \overline{OR}/\overline{OP} = y/1 = y,$$

¹Um termo mais apropriado seria circunferência trigonométrica, mas o termo círculo trigonométrico é tradicionalmente utilizado na literatura e vamos mantê-lo.

de modo que as coordenadas cartesianas do ponto P são dadas por

$$P = (x, y) = (\cos(\theta), \sin(\theta)).$$

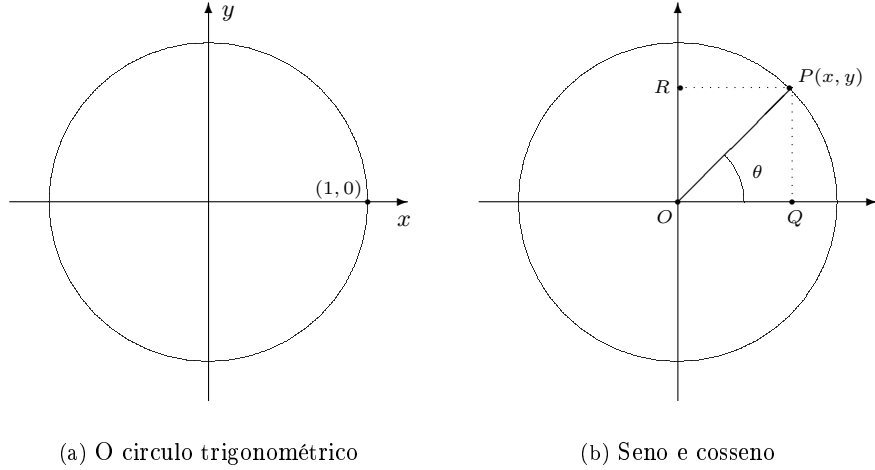


Figura 8.3: O seno e o cosseno no círculo trigonométrico

Raciocinando no sentido inverso, seja $P(x, y)$ um ponto qualquer sobre o círculo unitário e θ o ângulo correspondente, medido no sentido anti-horário a partir do semi-eixo positivo das abscissas. Definimos o cosseno deste ângulo como o valor da abscissa de P e seu seno como o valor da ordenada de P . Esta definição do seno e cosseno no círculo trigonométrico nos permite calcular os valores das razões trigonométricas para ângulos dados por qualquer número real, e não apenas para ângulos agudos como no caso de triângulos retângulos. A Figura 8.4 ilustra este raciocínio para ângulos no segundo, terceiro e quarto quadrantes.

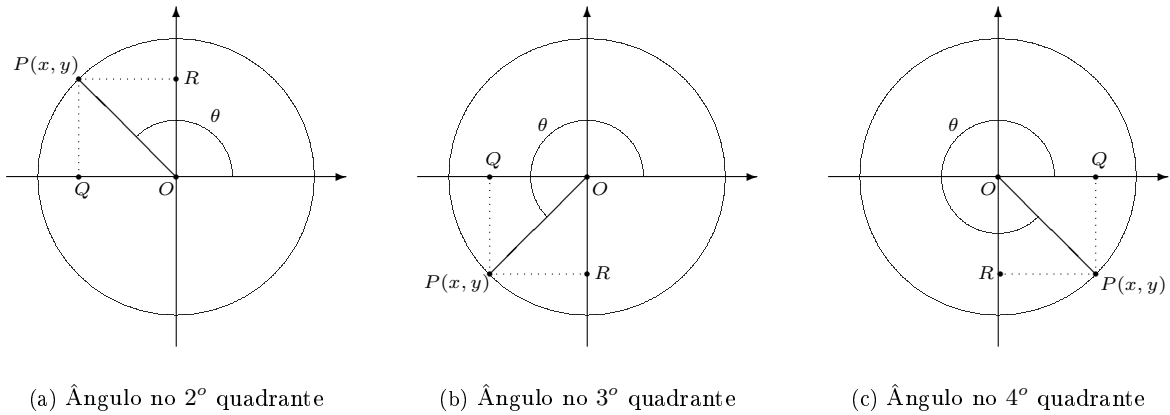


Figura 8.4: $\cos(\theta) = \overline{OQ} = x$ e $\sin(\theta) = \overline{OR} = y$.

8.2.1 Sinal do seno e cosseno

- se $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ então $\sin(\theta) > 0$ e $\cos(\theta) > 0$ - Figura 8.3(b);
- se $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ então $\sin(\theta) > 0$ e $\cos(\theta) < 0$ - Figura 8.4(a);

- se $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ então $\text{sen}(\theta) < 0$ e $\text{cos}(\theta) < 0$ - Figura 8.4(b);
- se $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ então $\text{sen}(\theta) < 0$ e $\text{cos}(\theta) > 0$ - Figura 8.4(c).

8.3 As funções circulares

A função seno

Seja x um ângulo variável no círculo trigonométrico. A cada valor de x associamos um único valor para seu seno, denotado $\text{sen}(x)$. Definimos então a função $f(x) = \text{sen}(x)$, cujo gráfico é mostrado na Figura 8.5.

A Figura 8.5 exibe duas propriedades importantes da função $\text{sen}(x)$:

- é periódica de período $T = 2\pi$; isto significa que suas imagens se repetem de 2π em 2π radianos, isto é, $\forall x \in \mathbb{R}$ temos que $\text{sen}(x) = \text{sen}(x + 2\pi)$;
- é limitada entre -1 e 1 , isto é, $\forall x \in \mathbb{R}$ temos que $-1 \leq \text{sen}(x) \leq 1$.

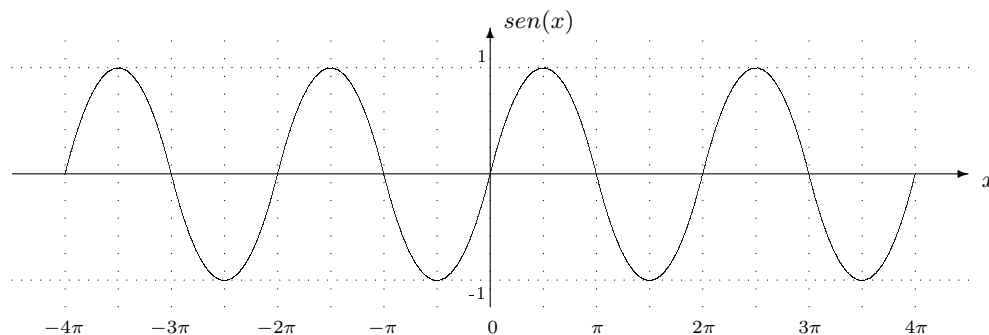


Figura 8.5: Senóide $\text{sen}(x)$

A função cosseno

De modo análogo ao seno, seja x um ângulo variável no círculo trigonométrico. A cada valor de x associamos um único valor para seu cosseno, denotado $\text{cos}(x)$. Definimos então a função $f(x) = \text{cos}(x)$, cujo gráfico é mostrado na Figura 8.6.

A Figura 8.6 exibe duas propriedades importantes da função $\text{cos}(x)$:

- é periódica de período $T = 2\pi$; isto significa que suas imagens se repetem de 2π em 2π radianos, isto é, $\forall x \in \mathbb{R}$ temos que $\text{cos}(x) = \text{cos}(x + 2\pi)$;
- é limitada entre -1 e 1 , isto é, $\forall x \in \mathbb{R}$ temos que $-1 \leq \text{cos}(x) \leq 1$.

8.4 Mais identidades trigonométricas

Simetrias

As identidades de simetria estabelecem o efeito da substituição de α por $-\alpha$. Pela Figura 8.7 temos

$$\text{sen}(\alpha) = \overline{QR} = -\overline{QS} = -\text{sen}(-\alpha) \quad \therefore \quad \text{sen}(\alpha) = -\text{sen}(-\alpha). \quad (8.3a)$$

$$\text{cos}(\alpha) = \overline{OQ} = \text{cos}(-\alpha) \quad \therefore \quad \text{cos}(\alpha) = \text{cos}(-\alpha). \quad (8.3b)$$

Estas identidades também podem ser facilmente observadas nas Figuras 8.5 e 8.6 respectivamente. Finalmente

$$\text{tg}(\alpha) = \frac{\text{sen}(\alpha)}{\text{cos}(\alpha)} = \frac{-\text{sen}(-\alpha)}{\text{cos}(-\alpha)} = -\text{tg}(-\alpha) \quad \therefore \quad \text{tg}(\alpha) = -\text{tg}(-\alpha). \quad (8.3c)$$

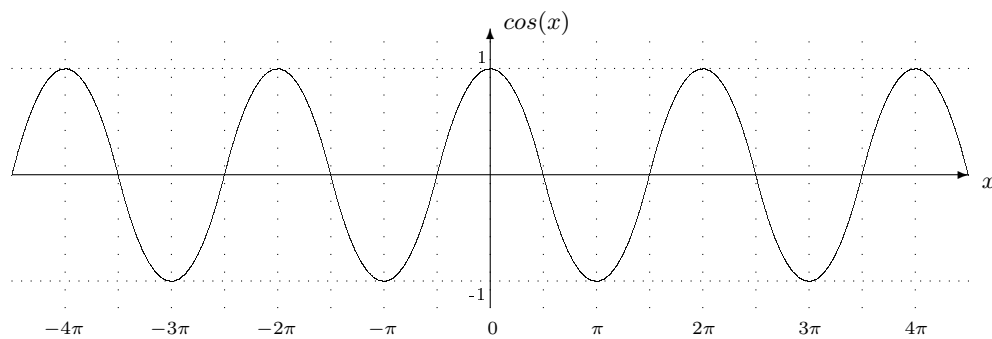


Figura 8.6: Senóide $\cos(x)$

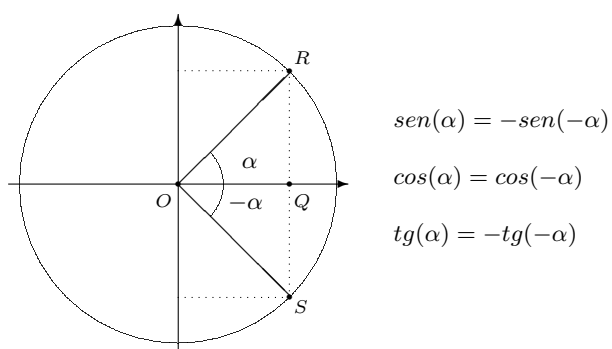


Figura 8.7: Simetrias do seno, cosseno e tangente.

Deslocamentos (translações) horizontais

As identidades de translação estabelecem o efeito da substituição de α por $\alpha - \frac{\pi}{2}$ e de α por $\alpha + \frac{\pi}{2}$. Pela congruência dos triângulos da Figura 8.8(a) observamos que

$$\overline{OR} = \overline{OQ} \quad \therefore \quad \text{sen}(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right), \quad (8.3d)$$

e

$$\overline{OP} = -\overline{OS} \quad \therefore \quad \cos(\alpha) = -\text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right). \quad (8.3e)$$

De modo análogo, pela Figura 8.8(b) observamos que

$$\overline{OQ} = \overline{OR} \quad \therefore \quad \cos(\alpha) = \text{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (8.3f)$$

e

$$\overline{OS} = -\overline{OP} \quad \therefore \quad \text{sen}(\alpha) = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right). \quad (8.3g)$$

Fórmulas da soma e diferença

Iniciamos deduzindo a fórmula do cosseno da diferença.

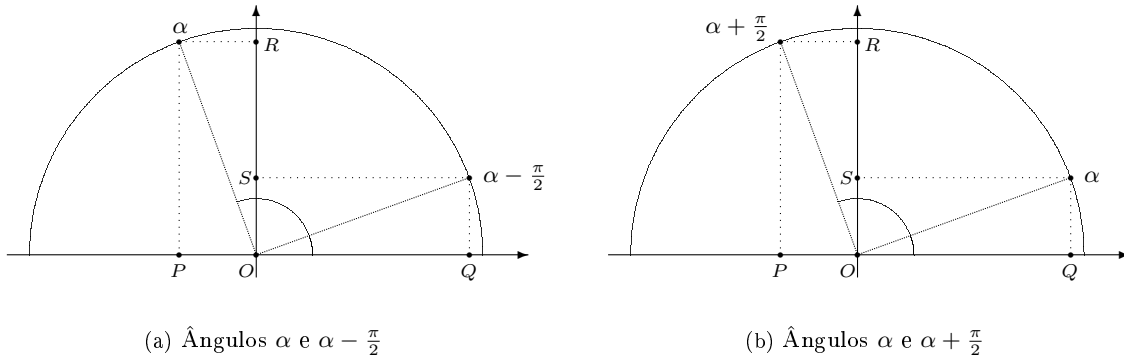


Figura 8.8: Ângulos deslocados (transladados).

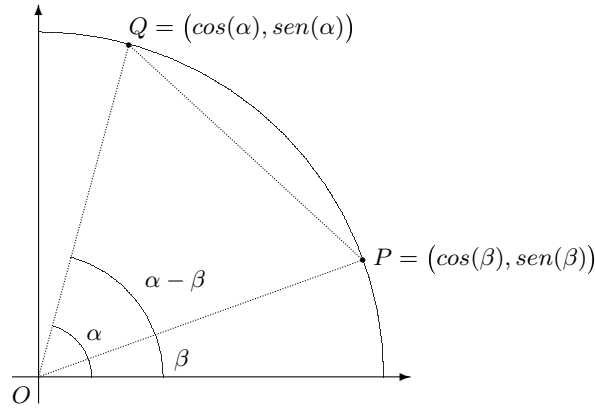


Figura 8.9: O cosseno da diferença: $\cos(\alpha - \beta)$

Calculando o quadrado da distância entre os pontos P e Q da Figura 8.9 temos:

$$\begin{aligned}
 \overline{PQ}^2 &= [\cos(\alpha) - \cos(\beta)]^2 + [\sin(\alpha) - \sin(\beta)]^2 \\
 &= \cos^2(\alpha) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) + \cos^2(\beta) + \sin^2(\alpha) - 2\sin(\alpha)\sin(\beta) + \sin^2(\beta) \\
 &= \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \sin^2(\beta) - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) - 2\sin(\alpha)\sin(\beta) \\
 &= 1 + 1 - 2\cos(\alpha)\cos(\beta) - 2\sin(\alpha)\sin(\beta) \\
 &= 2 - 2[\cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)]
 \end{aligned}$$

Aplicando a Lei dos Cossenos no triângulo OPQ da Figura 8.9 temos:

$$\begin{aligned}
 \overline{PQ}^2 &= \overline{OP}^2 + \overline{OQ}^2 - 2\overline{OP}\overline{OQ}\cos(\alpha - \beta) \\
 &= 1 + 1 - 2\cos(\alpha - \beta) \\
 &= 2 - 2\cos(\alpha - \beta)
 \end{aligned}$$

Comparando os dois resultados obtidos para $\overline{PQ}^2$ obtemos o cosseno da diferença

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

O cosseno da soma pode agora ser obtido usando um artifício algébrico engenhoso - substituímos a soma por uma diferença e aplicamos o cosseno da diferença

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos(\alpha)\cos(-\beta) + \sin(\alpha)\sin(-\beta)$$

e então aplicamos as identidades (8.3a) e (8.3b) para obtermos o cosseno da soma

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$

Para obtermos o seno da diferença, inicialmente usamos a identidade (8.3d) para escrever

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos\left(\alpha - \beta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left[\alpha - \left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

e a seguir aplicamos o cosseno da diferença no membro direito

$$\sin(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha)\sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right).$$

Mas, pelo cosseno da soma

$$\cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\beta)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(\beta)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\beta)$$

e pela identidade (8.3f)

$$\sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\beta).$$

Assim o seno da diferença é dado por

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

O seno da soma pode ser obtido pelo mesmo artifício aplicado na dedução do cosseno da soma - substituímos a soma por uma diferença e aplicamos o seno da diferença

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin[\alpha - (-\beta)] = \sin(\alpha)\cos(-\beta) - \cos(\alpha)\sin(-\beta)$$

e então aplicamos as identidades (8.3a) e (8.3b) para obtermos o seno da soma

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$

Sumarizamos aqui os resultados obtidos:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta) \quad (8.3h)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \quad (8.3i)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta) \quad (8.3j)$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \quad (8.3k)$$

8.5 Redução ao Primeiro Quadrante

Os eixos coordenados dividem o plano cartesiano em quadrantes:

- 1º quadrante: $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$;
- 2º quadrante: $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$;
- 3º quadrante: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$;
- 4º quadrante: $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$.

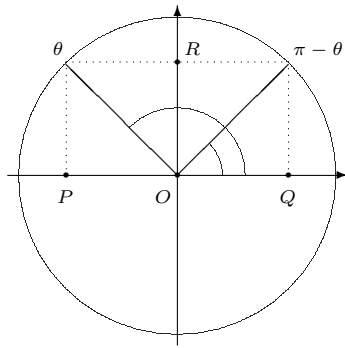
Dado um ângulo θ , reduzi-lo ao primeiro quadrante consiste em determinar um ângulo no primeiro quadrante que possua as mesmas razões trigonométricas de θ , a menos de um sinal. Devemos considerar 3 casos.

Redução do segundo ao primeiro quadrante

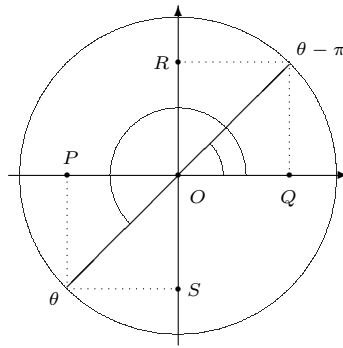
Na Figura 8.10(a) observamos que se $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ então sua redução ao primeiro quadrante é $\pi - \theta$. Temos que

- $\sin(\theta) = \overline{OR} = \sin(\pi - \theta)$
- $\cos(\theta) = \overline{OP} = -\overline{OQ} = -\cos(\pi - \theta)$

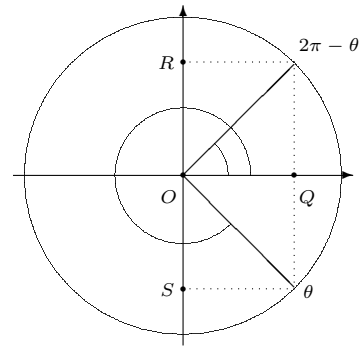
Conseqüentemente



(a) Do 2º ao 1º quadrante



(b) Do 3º ao 1º quadrante



(c) Do 4º ao 1º quadrante

Figura 8.10: Redução ao primeiro quadrante.

- $tg(\theta) = -tg(\pi - \theta)$
- $ctg(\theta) = -cotg(\pi - \theta)$
- $sec(\theta) = -sec(\pi - \theta)$
- $csc(\theta) = csc(\pi - \theta)$

Exemplo 8.3 O ângulo $\frac{5\pi}{6}$ está no segundo quadrante, pois $\frac{\pi}{2} < \frac{5\pi}{6} < \pi$. Assim sua redução ao primeiro quadrante é $\pi - \frac{5\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$. Logo

$$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad e \quad \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Redução do terceiro ao primeiro quadrante

Na Figura 8.10(b) observamos que se $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ então sua redução ao primeiro quadrante é $\theta - \pi$. Temos que

- $\text{sen}(\theta) = \overline{OS} = -\overline{OR} = -\text{sen}(\theta - \pi)$
- $\cos(\theta) = \overline{OP} = -\overline{OQ} = -\cos(\theta - \pi)$

Conseqüentemente

- $tg(\theta) = tg(\theta - \pi)$
- $ctg(\theta) = cotg(\theta - \pi)$
- $sec(\theta) = -sec(\theta - \pi)$
- $csc(\theta) = -csc(\theta - \pi)$

Exemplo 8.4 O ângulo $\frac{5\pi}{4}$ está no terceiro quadrante, pois $\pi < \frac{5\pi}{4} < \frac{3\pi}{2}$. Assim sua redução ao primeiro quadrante é $\frac{5\pi}{4} - \pi = \frac{\pi}{4}$. Logo

$$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad e \quad \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Redução do quarto ao primeiro quadrante

Na Figura 8.10(c) observamos que se $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$ então sua redução ao primeiro quadrante é $2\pi - \theta$. Temos que

- $\text{sen}(\theta) = \overline{OS} = -\overline{OR} = -\text{sen}(2\pi - \theta)$
- $\cos(\theta) = \overline{OQ} = \cos(2\pi - \theta)$

Conseqüentemente

- $tg(\theta) = -tg(2\pi - \theta)$
- $sec(\theta) = sec(2\pi - \theta)$
- $ctg(\theta) = -cotg(2\pi - \theta)$
- $csc(\theta) = -csc(2\pi - \theta)$

Exemplo 8.5 O ângulo $\frac{5\pi}{3}$ está no quarto quadrante, pois $\frac{3\pi}{2} < \frac{5\pi}{3} < 2\pi$. Assim sua redução ao primeiro quadrante é $2\pi - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$. Logo

$$\text{sen}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad e \quad \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

8.6 Equações trigonométricas

Uma equação trigonométrica é aquela que envolve as funções trigonométricas - *seno*, *coseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante*, *cossecante* - e suas respectivas inversas. Resolver uma equação trigonométrica significa encontrar os valores do ângulo que a verifica. Para este propósito a Tabela 8.1, que nos dá os valores do *seno*, *coseno* e *tangente* dos ângulos notáveis do 1º quadrante, será de grande auxílio.

θ	$\text{sen}(\theta)$	$\cos(\theta)$	$tg(\theta)$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\cancel{\text{d}}$

Tabela 8.1: Seno, coseno e tangente dos ângulos notáveis do 1º quadrante

A Tabela 8.1 nos fornece os valores de *seno*, *coseno* e *tangente* apenas para os ângulos notáveis do 1º quadrante. A Figura 8.11 mostra os ângulos nos segundo, terceiro e quarto quadrantes redutíveis aos notáveis do primeiro quadrante.

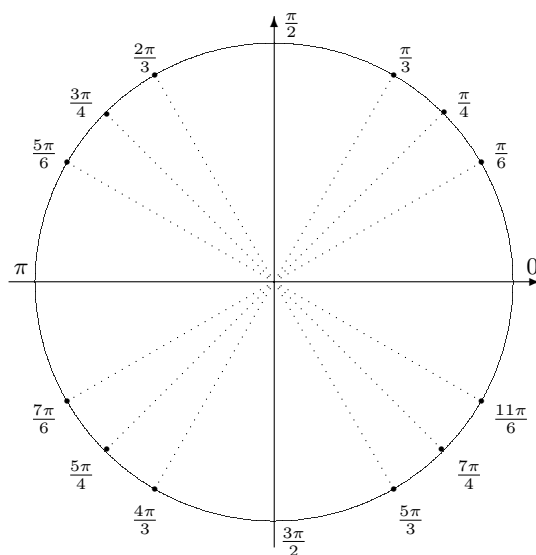


Figura 8.11: Ângulos redutíveis aos notáveis

Exemplo 8.6 Resolver a equação $\text{sen}(x) = 0$.

Solução: pela Tabela 8.1 temos que $x = 0$. Observando a Figura 8.11 temos que $x = \pi$ também é uma solução da equação dada. Além disto, qualquer arco côngruo a estes também são soluções, de modo que a solução geral é da forma

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 8.7 Resolver a equação $\sin(x) = \cos(x)$.

Solução: pela Tabela 8.1 temos que $x = \frac{\pi}{4}$. Observando a Figura 8.11 temos que $x = \frac{5\pi}{4}$ (simétrico de $\frac{\pi}{4}$ em relação à origem) também é uma solução da equação dada. Além disto, qualquer arco côngruo a estes também são soluções, de modo que a solução geral pode ser dada como

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Exemplo 8.8 Resolver a equação $2\cos(x) - 1 = 0$.

Solução: temos que $\cos(x) = \frac{1}{2}$, e pela Tabela 8.1 temos que $x = \frac{\pi}{3}$. Observando a Figura 8.11 observamos que $x = \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ (simétrico de $\frac{\pi}{3}$ em relação ao eixo horizontal) também é uma solução da equação dada. Além disto, qualquer arco côngruo a estes também são soluções, de modo que a solução geral pode ser dada como

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

8.7 Problemas Propostos

Problema 8.1 [Mack-SP] A medida de um ângulo é 225° . Determine sua medida em radianos.

Problema 8.2 [Fuvest-SP] Qual o valor do ângulo agudo formado pelos ponteiros de um relógio à 1 hora e 12 minutos.

Problema 8.3 [UF-PA] Quantos radianos percorre o ponteiro dos minutos de um relógio em 50 minutos?

Problema 8.4 [Cessem-SP] Em quais quadrantes estão os ângulos α , β e γ tais que: $\sin(\alpha) < 0$ e $\cos(\alpha) < 0$; $\cos(\beta) < 0$ e $\tan(\beta) < 0$; $\sin(\gamma) > 0$ e $\cot(\gamma) > 0$, respectivamente.

Problema 8.5 [FECAP-SP] Determine o valor da expressão: $\sin(\pi/4) + \cos(\pi/4) + \cos(\pi/2 + \pi/4)$.

Problema 8.6 [Santa Casa-SP] Seja a função f , de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1 + 4\sin(x)$. Determine o intervalo do conjunto imagem dessa função.

Problema 8.7 [UFP-RS] Qual o intervalo do conjunto imagem da função f , $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2\sin(x) - 3$.

Problema 8.8 [F.C. Chagas-BA] Para quais valores de a as sentenças $\sin(x) = a$ e $\cos(x) = 2\sqrt{a} - 1$ são verdadeiras para todo x real.

Problema 8.9 [Univ. Gama Filho-RJ] Calcular os valores de k que verificam simultaneamente as igualdades: $\sin(x) = k - 1$ e $\cos(x) = \sqrt{3 - k^2}$

Problema 8.10 [UF São Carlos-SP] Calcule o valor da expressão: $\frac{2 - \sin^2(x)}{\cos^2(x)} - \tan^2(x)$.

Problema 8.11 [FGV-RJ] Determine a função trigonométrica equivalente a $\frac{\sec(x) + \sin(x)}{\operatorname{cosec}(x) + \cos(x)}$.

Problema 8.12 [PUC-RS] Determine a igualdade da expressão: $\frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} + \frac{1 + \cos(x)}{\sin(x)}$.

Problema 8.13 [FEP-PA] No círculo trigonométrico um ângulo é tal que seu seno vale $\frac{3}{5}$ e encontra-se no segundo quadrante. Calcule o valor da tangente deste ângulo.

Problema 8.14 [Edson Queiroz-CE] Sabendo que $\sec(x) = 3$ e $\tan(x) < 0$, calcule $\sin(x)$.

Problema 8.15 [ITA-SP] Calcule o valor da expressão $y = \frac{2\tan(x)}{1-\tan^2(x)}$ quando $\cos(x) = \frac{-3}{7}$ e $\tan(x) < 0$.

Problema 8.16 [PUC-RS] Sendo $\operatorname{tg}(x) = \frac{-\sqrt{7}}{7}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, calcule $\operatorname{sen}(x)$.

Problema 8.17 [PUC-SP] Quais os valores de x satisfazem a equação $\cos(3x - \frac{\pi}{5}) = 0$.

Problema 8.18 [Cescea-SP] Determine a soma das raízes da equação $1 - 4\cos^2(x) = 0$ compreendidas entre 0 e π .

Problema 8.19 [AMAN-RJ] Determine os valores de x que satisfazem a equação $3^{\cos(2x)} = 1$.

Problema 8.20 [FC Chagas-BA] Determine o número de soluções da equação $\cos(2x) = -\frac{1}{2}$, no intervalo $[-\pi, \pi]$.

Problema 8.21 [Mack-SP] Determine os valores de x para que $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x + \pi)$, no intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$.

Problema 8.22 [Osec-SP] Determine o conjunto solução da equação $\cos(x) = \cos(\frac{\pi}{3} - x)$, sendo $0 < x < 2\pi$.

Problema 8.23 [UF Uberlândia-MG] Determine o conjunto solução da equação $\operatorname{tg}(x+1)\sqrt{3}\cotg(x) - 1 = 0$ no intervalo $[0, \pi]$.

Problema 8.24 [Fac. Belas Artes-SP] Determine os valores de x na equação $\operatorname{tg}(x) + \cotg(x) = 2$.

Problema 8.25 [Mack-SP] Determine os valores de x na equação $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1+\cos(x)}{2}$, no intervalo $[0, 2\pi]$.

Problema 8.26 [Metodista-S.B. do Campo-SP] Determine os valores de x na equação $\sec^2(x) + 2\operatorname{tg}^2(x) = 2$ no intervalo $[0, 2\pi]$.

Problema 8.27 [Cesgranrio-RJ] Determine as raízes da equação $\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(\pi - x) = \frac{1}{2}$ no intervalo $[0, \pi]$.

Problema 8.28 [Cesgranrio-RJ] Determine a soma das quatro raízes da equação $\operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}(-x) = 0$, no intervalo $[0, 2\pi]$.

Problema 8.29 [CESESP-PE] Determine o conjunto solução da equação $\frac{1}{1+\operatorname{sen}(x)} + \frac{1}{1-\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

Problema 8.30 [Mack-SP] Determine a expressão geral dos arcos x para os quais $2[\cos(x) + \sec(x)] = 5$.

Problema 8.31 [FGV-RJ] Determine a solução da equação: $3[1 - \cos(x)] = \operatorname{sen}^2(x)$.

Problema 8.32 [FGV-SP] Determine a soma das raízes da equação

$$\operatorname{sen}^3(x) - 3\operatorname{sen}^2(x)\cos(x) + 3\operatorname{sen}(x).\cos^2(x) - \cos^3(x) = 0$$

no intervalo $[0, 2\pi]$.

Problema 8.33 [Mack-SP] Sendo $\operatorname{sen}(x) = \frac{12}{13}$ e $\operatorname{sen}(y) = \frac{4}{5}$, $0 < x, y < \frac{\pi}{2}$, determine $\operatorname{sen}(x - y)$.

Problema 8.34 [FEI-SP] Se $\cos(x) = \frac{3}{5}$, calcule $\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2})$.

Problema 8.35 [F. S. Judas-SP] Se $\operatorname{sen}(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e x um arco do segundo quadrante, então calcule

$$\operatorname{sen}(x - \frac{\pi}{2})\cos(x - \frac{\pi}{2}).$$

Problema 8.36 [UC-MG] Prove que $\frac{2\operatorname{tg}(x)}{1+\operatorname{tg}^2(x)}$ é idêntica a $\operatorname{sen}(2x)$.

Problema 8.37 [UF-GO] Se $\operatorname{sen}(x) = \frac{\sqrt{3}}{6}$, calcule $\cos(2x)$.

Problema 8.38 [F. S. Judas-SP] Se $\operatorname{sen}(x) = \frac{2}{3}$ e x um arco do primeiro quadrante, então calcule $\operatorname{sen}(2x)$.

Problema 8.39 [UCP-PR] Sabendo que $\cos(36^\circ) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, calcule $\cos(72^\circ)$.

Problema 8.40 [AMAN-RJ] Determine os valores de x que satisfazem a inequação: $\cos(5x) \leq \frac{1}{2}$.

Problema 8.41 [FGV-SP] Determine a solução da inequação $\sqrt{2} \cdot \cos^2(x) > \cos(x)$ no intervalo $[0, \pi]$.

Problema 8.42 [UF São Carlos-SP] Determine o conjunto solução da inequação $\frac{1}{\cos \sec(x)} - \frac{1}{\sec(x)} > 0$, para $0 \leq x \leq \pi$.

Problema 8.43 [Mack-SP] Determine a solução da inequação $\frac{\cos(x) - \sin(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Problema 8.44 [PUC-SP] Determine a solução da inequação $\frac{\sin(x) - 2}{\cos(2x) + 3\cos(x-1)} > 0$, no conjunto $0 \leq x \leq 2\pi$.

Problema 8.45 [ITA-SP] Dado o polinômio P definido por $P(x) = \sin(\theta) - \tan(\theta)x + \sec^2(\theta)x^2$, determine os valores de θ no intervalo $[0, 2\pi]$ tais que P admita somente raízes reais.

Problema 8.46 Use as identidades (8.3i) e (8.3k) para deduzir a tangente da soma

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}.$$

Problema 8.47 Use as identidades (8.3h) e (8.3j) para deduzir a tangente da diferença

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}.$$

Problema 8.48 (*Fórmulas do ângulo duplo*).

(a) Use a identidade (8.3i) para mostrar o cosseno do ângulo duplo (sugestão: faça $2\alpha = \alpha + \alpha$)

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha).$$

(b) Use a identidade (8.3k) para mostrar o seno do ângulo duplo

$$\sin(2\alpha) = 2\cos(\alpha)\sin(\alpha).$$

Problema 8.49 (*Fórmulas do ângulo metade*). Use a identidade fundamental e o cosseno do ângulo duplo para deduzir o cosseno e o seno do ângulo metade

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} \left[1 + \cos(2\alpha) \right].$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos(2\alpha) \right].$$

8.8 Respostas dos Problemas Propostos - Capítulo 8

- 8.1 (página 40) $\frac{5\pi}{4}$
- 8.2 (página 40) 36°
- 8.3 (página 40) $\frac{5\pi}{3}$
- 8.4 (página 40) 3° , 2° e 1°
- 8.5 (página 40) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
- 8.6 (página 40) $[-3, 5]$
- 8.7 (página 40) $[-5, -1]$
- 8.8 (página 40) $a = 1$
- 8.9 (página 40) $k = \frac{3}{2}$
- 8.10 (página 40) 2
- 8.11 (página 40) $\tan(x)$
- 8.12 (página 40) $2\cos \sec(x)$
- 8.13 (página 40) $-3/4$
- 8.14 (página 40) $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$

- 8.15 (página 41) $\frac{12\sqrt{10}}{31}$
- 8.16 (página 41) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
- 8.17 (página 41) $\frac{7\pi}{30} + k\frac{\pi}{3}$
- 8.18 (página 41) π
- 8.19 (página 41) $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$
- 8.20 (página 41) $4 : -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$
- 8.21 (página 41) $0, \pi, 2\pi$
- 8.22 (página 41) $\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$
- 8.23 (página 41) $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{\pi}{4}$
- 8.24 (página 41) $\frac{\pi}{4} + k\pi$
- 8.25 (página 41) 3
- 8.26 (página 41) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$
- 8.27 (página 41) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
- 8.28 (página 41) $\frac{7\pi}{2}$
- 8.29 (página 41) Não existe
- 8.30 (página 41) $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$
- 8.31 (página 41) $x = k.360^\circ$
- 8.32 (página 41) $\frac{3\pi}{2}$
- 8.33 (página 41) $\frac{16}{65}$
- 8.34 (página 41) $\frac{-3}{5}$
- 8.35 (página 41) 0, 5
- 8.37 (página 41) $\frac{5}{6}$
- 8.38 (página 41) $\frac{4\sqrt{5}}{9}$
- 8.39 (página 42) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
- 8.40 (página 42) $\frac{2k\pi}{3} + \frac{pi}{15} \leq x \leq \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{3}$
- 8.41 (página 42) $0 \leq x < \frac{\pi}{4}$ ou $\frac{\pi}{2} < x \leq \pi$
- 8.42 (página 42) S = voltar nesta
- 8.43 (página 42) S = $0 < x < \frac{\pi}{4}$
- 8.44 (página 42) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$
- 8.45 (página 42) $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2} < \theta \leq 2\pi$